

PARAGRAAF 11.0 : RIEMANN-SOM EN OPPERVLAKTE

LES 1 RIEMANN-SOM

DEFINITIE RIEMANN-SOM

Een oppervlakte kun je benaderen met behulp van een Riemann-som $= \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x$

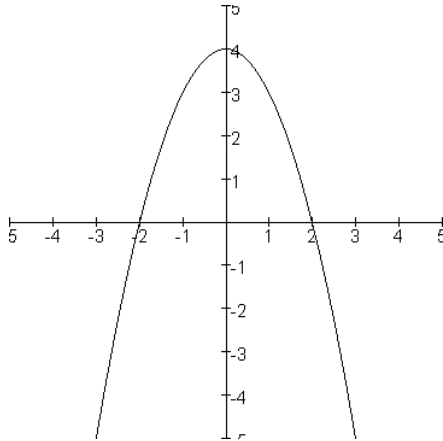
VOORBEELD 1

Gegeven is de functie $f(x) = 4 - x^2$.

- a. Schets de grafiek van -3 tot 3.
- b. Benader de oppervlakte tussen $f(x)$ en de x-as met een Riemann-som en $\Delta x=1$.
- c. Benader de oppervlakte tussen $f(x)$ en de x-as met een Riemann-som en $\Delta x= \frac{1}{2}$.

OPLOSSING 1

- a. De snijpunten met de x-as zijn $x=-2$ en $x=2$. Teken rechthoekjes van 1 breed en neem de gemiddelde hoogte op het interval. Er zijn dus 4 rechthoekjes !



Je kunt met een Riemann-som (rechthoekjes van 1 breed) de oppervlakte uitrekenen

- Oppervlakte $= \sum_{i=1}^4 f(x_i) \cdot \Delta x = f(x_1) \cdot \Delta x + f(x_2) \cdot \Delta x + f(x_3) \cdot \Delta x + f(x_4) \cdot \Delta x$

(1) Rechthoek I van 1 tot 2 $\rightarrow Opp I = f(x) \cdot \Delta x = f\left(1\frac{1}{2}\right) \cdot 1 = 1\frac{3}{4} \cdot 1 = 1\frac{3}{4}$

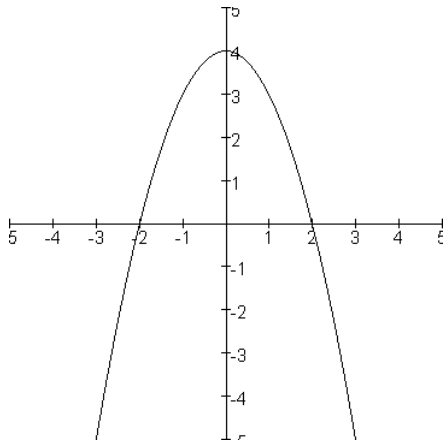
(2) Rechthoek II van 0 tot 1 $\rightarrow Opp II = f(x) \cdot \Delta x = f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot 1 = 3\frac{3}{4} \cdot 1 = 3\frac{3}{4}$

(3) Rechthoek III van -1 tot 0 $\rightarrow Opp III = f(x) \cdot \Delta x = f\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 1 = 3\frac{3}{4} \cdot 1 = 3\frac{3}{4}$

(4) Rechthoek IV van -2 tot -1 $\rightarrow Opp IV = f(x) \cdot \Delta x = f\left(-1\frac{1}{2}\right) \cdot 1 = 1\frac{3}{4} \cdot 1 = 1\frac{3}{4}$

Totale oppervlakte benadering $= 1\frac{3}{4} + 3\frac{3}{4} + 3\frac{3}{4} + 1\frac{3}{4} = 11$

- b. De snijpunten met de x-as zijn $x=-2$ en $x=2$. Teken rechthoekjes van $\frac{1}{2}$ breed en neem de gemiddelde hoogte op het interval.



- Oppervlakte RECHTS :

(1) Rechthoek I van $1\frac{1}{2}$ tot 2 $\rightarrow OppI = f(x) \cdot \Delta x = f\left(1\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} = 0,9375 \cdot \frac{1}{2} = \dots$

(2) Rechthoek II van 1 tot $1\frac{1}{2}$ $\rightarrow OppII = f(x) \cdot \Delta x = f\left(1\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} = 2,4375 \cdot \frac{1}{2} = \dots$

(3) Rechthoek III van $\frac{1}{2}$ tot 1 $\rightarrow OppIII = f(x) \cdot \Delta x = f\left(\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} = 3,4375 \cdot \frac{1}{2} = \dots$

(4) Rechthoek IV van 0 tot $\frac{1}{2}$ $\rightarrow OppIV = f(x) \cdot \Delta x = f\left(\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} = 3,9375 \cdot \frac{1}{2} = \dots$

Totale Oppervlakte RECHTS = 5,375

- Aangezien de grafiek symmetrisch is , is Opp RECHTS = Opp LINKS :
- Dus de Totale oppervlakte benadering = $2 \cdot 5,375 = 10,75$

OPMERKING

- Je ziet dat de 2^e benadering (uiteraard) beter is !
- Hoe kleiner de rechthoekjes, hoe beter de benadering !!

HUISWERK 1

Gegeven is de functie $f(x) = 3x - x^2$.

- Schets de grafiek van 0 tot 3.
- Benader de oppervlakte tussen $f(x)$ en de x-as met een Riemann-som en met $\Delta x = 1$.

LES 2 REGELS VOOR PRIMITIVEREN**DEFINITIE INTEGRAAL EN OPPERVLAKTE**

- Als je de Δx heel klein maakt (mini) dan noemen we hem dx
- De som Σ gaat over in $\int$!!!
- Er geldt dan dat de oppervlakte tussen de grenzen $x=a$ en $x=b$:

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x = \int_a^b f(x) \cdot dx$$

- Oppervlakte $= \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

DEFINITIE PRIMITIVEREN / INTEGREREN

- Integreren of primitiveren is het omgekeerde van differentiëren.
- Notatie Primitieve : $F(x)$

VOORBEELD 1

Denk aan de regel : *Integreren is het omgekeerde van differentiëren.*

Wat is dan de primitieve van :

- $f(x) = 4$
- $f(x) = 2x$
- $f(x) = 24x^5$

OPLOSSING 1

- $F(x) = 4x + c$ want $F'(x) = 4$
- $F(x) = x^2 + c$ want $F'(x) = 2x$
- $F(x) = 4x^6 + c$ want $F'(x) = 24x^5$

OPMERKING

- Bij iedere formule horen miljoenen primitieven (c kan verschillend zijn).
- $c = \{ \text{integratieconstante} \}$

REGELS VOOR INTEGREREN VAN POLYNOMEN (x^n)

(1) Hoofdregel : $f(x) = x^n \Rightarrow F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$

(2) Hulpregel : $f(x) = a \Rightarrow F(x) = ax$

VOORBEELD 1

Primitiveer met behulp van de regels hierboven :

a. $f(x) = x^7 + 5x^4$

b. $f(x) = \sqrt{x}$

c. $f(x) = \frac{3}{x^4}$

OPLOSSING 1

Primitiveer met behulp van de regels hierboven :

a. $F(x) = \frac{1}{7+1} x^{7+1} + 5 \frac{1}{4+1} x^{4+1} = \frac{1}{8} x^8 + x^5$

b. $F(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{1,5} x^{1\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} x\sqrt{x}$

c. $f(x) = 3x^{-4} \rightarrow F(x) = 3 \cdot \frac{1}{-4+1} x^{-4+1} = -1x^{-3} = -\frac{1}{x^3}$

HUISWERK 2 : PRIMITIVEER

a. $f(x) = x^3$

b. $f(x) = \frac{1}{x^4}$

c. $f(x) = 3x^7$

d. $f(x) = \frac{x^2 + 7}{x^2}$

e. $f(x) = 5x^2 + 6x - 22$

f. $f(x) = \frac{6}{5x^3}$

g. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

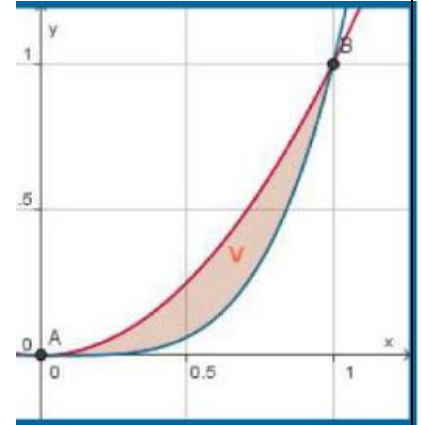
h. $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$

LES 3 OPPERVLAKTE BEREKENEN TUSSEN F EN G**STAPPENPLAN VOOR DE OPPERVLAKTE TUSSEN F(X) EN G(X)**

- (1) Maak een schets
- (2) Bereken de snijpunten van f en g (deze x-en noemen we a en b)
- (3) Oppervlakte (Opp) tussen f en g =

$$Opp = \int_a^b (f(x) - g(x))dx = \int_a^b v(x)dx = V(b) - V(a)$$

(Waarbij $v(x)$ de verschilfunctie tussen f en g is, met f BOVEN g)

**VOORBEELD 1**

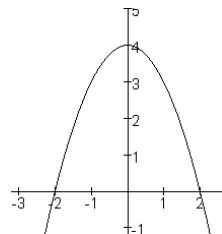
Gegeven is de functie $f(x) = 4 - x^2$

- a. Bereken exact de oppervlakte tussen f(x) en de x-as.
- b. Bereken exact de oppervlakte tussen f(x) en de lijn y=3.

OPLOSSING 1

- a. Volg het stappenplan :

1. De grafiek van f



2. $f(x) = 0$

$$x = 2 \vee x = -2$$

$$4 - x^2 = 0$$

3. De grenzen zijn -2 en 2. De x-as heeft vergelijking $y=0$:

- Oppervlakte = $\int_{-2}^2 (f(x) - 0)dx = \int_{-2}^2 (4 - x^2)dx$

- $F(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3$

- $F(2) = 4 \cdot 2 - \frac{1}{3} \cdot (2)^3 = \frac{16}{3}$

- $F(-2) = 4 \cdot (-2) - \frac{1}{3} \cdot (-2)^3 = -\frac{16}{3}$

- Oppervlakte = $F(2) - F(-2) = \frac{16}{3} - -\frac{16}{3} = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}$

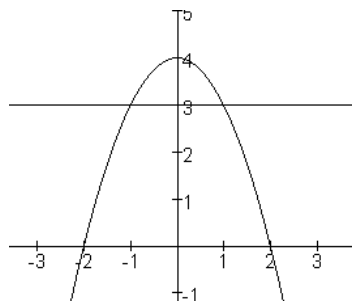
OPMERKING

Stap 3 kan ook in één regel. De primitieve staat dan tussen rechte haken :

$$Opp = \int_{-2}^2 f(x) dx = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \left[4x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-2}^2 = (4 \cdot 2 - \frac{1}{3} \cdot 2^3) - (4 \cdot -2 - \frac{1}{3} \cdot (-2)^3) = \frac{16}{3} - -\frac{16}{3} = \frac{32}{3} = 10 \frac{2}{3}$$

b. Volg het stappenplan :

1. De grafiek van f



2. $f(x) = 3$

$$4 - x^2 = 3$$

$$x^2 = 1$$

$$x = 1 \vee x = -1$$

3. De grenzen zijn -1 en 1. De x-as heeft vergelijking $y=0$:

- Oppervlakte = $\int_{-1}^1 (f(x) - 3) dx = \int_{-1}^1 (4 - x^2 - 3) dx = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx =$
- $F(x) = x - \frac{1}{3} x^3$
- $F(1) = \frac{2}{3}$ en $F(-1) = -\frac{2}{3}$
- $Opp = F(1) - F(-1) = \frac{2}{3} - -\frac{2}{3} = \frac{4}{3}$

HUISWERK 3 : EEN OPPERVLAKTE

Gegeven is de functie $f(x) = 2x^2$ en de lijn $y = 18$. (Huiswerk)

a. Schets de grafiek

b. Bereken exact de oppervlakte tussen $f(x)$ en de lijn $y = 18$.

c. Bereken exact de oppervlakte tussen $f(x)$ en de lijn $y = 5x - 3$.

PARAGRAAF 11.1 : PRIMITIEVEN EN INTEGRALEN

LES 2 : ANDERE REGELS VOOR PRIMITIVEREN / INTEGREREN

THEORIE VERSCHILLENDE FORMULES EN HUN PRIMITIEVEN

Er zijn nog een aantal regels. We geven de regels voor $c = 0$:

1. DE POLYNOMEN :

$$(i) \quad f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \quad (n \neq -1)$$

$$(ii) \quad f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \ln(x)$$

2. DE EXPONENTIËLE FUNCTIES :

$$(i) \quad f(x) = g^x \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{\ln(g)} \cdot g^x$$

$$(ii) \quad f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad F(x) = \ln(e) \cdot e^x = e^x$$

3. DE LOGARITMISCHE FUNCTIES :

$$(i) \quad f(x) = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad F(x) = x \ln(x) - x$$

$$(ii) \quad f(x) = {}^g \log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(g)} = \frac{1}{\ln(g)} \cdot \ln(x) \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{\ln(g)} \cdot (x \ln(x) - x)$$

VOORBEELD 1

Primitiveer

a. $f(x) = \log(x)$

b. $f(x) = 3 \cdot 4^x$

c. $f(x) = \frac{5}{x}$

d. $f(x) = \ln(x^3)$

OPLOSSING 1

a. $f(x) = {}^{10}\log(x) \quad \Rightarrow F(x) = \frac{1}{\ln(10)} \cdot (x \ln(x) - x)$

b. $f(x) = 3 \cdot 4^x \quad \Rightarrow F(x) = 3 \cdot \frac{1}{\ln(4)} \cdot 4^x$

c. $f(x) = 5 \cdot \frac{1}{x} \quad \Rightarrow F(x) = 5 \ln(x)$

d. $f(x) = 3 \ln(x) \quad \Rightarrow F(x) = 3(x \ln(x) - x)$

LES 3 VERDELEN IN TWEE DELEN**VOORBEELD 1**

Gegeven is de functie $f(x) = x^2$.

V is het vlakdeel ingesloten door de grafiek van f , de x-as en de lijn $x = 5$.

De lijn $x = a$ verdeelt V in de verhouding 2 : 1.

Bereken a in 2 decimalen nauwkeurig.

OPLOSSING 1

Maak eerst een schets :

(1) Bereken de hele oppervlakte :

$$Opp_{totaal} = \int_0^5 f(x) dx = \int_0^5 (x^2) dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^5 = \frac{1}{3} \cdot 5^3 = \frac{125}{3} = 41 \frac{2}{3}$$

$$Opp_{totaal} = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^5 = \frac{1}{3} \cdot 5^3 = \frac{125}{3} = 41 \frac{2}{3}$$

$$Opp_{totaal} = \frac{125}{3} = 41 \frac{2}{3}$$

(2) De oppervlakte van het linkerdeel is dan $= \frac{2}{3} \cdot \frac{125}{3} = \frac{250}{9}$

(3) Stel de vergelijking op en los op :

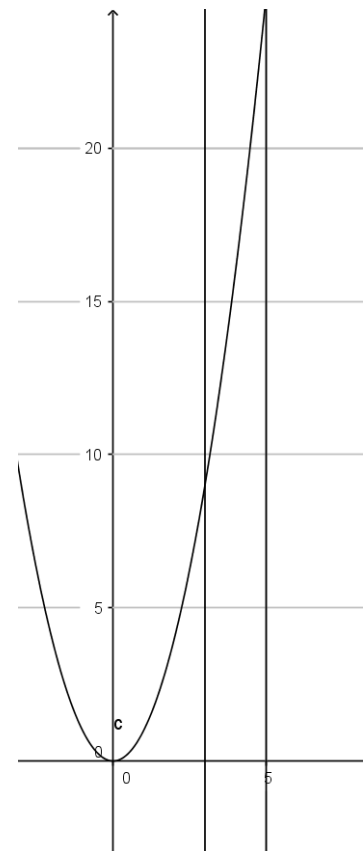
$$Opp_{links} = \int_0^a f(x) dx = \int_0^a (x^2) dx$$

$$Opp_{links} = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^a = \frac{1}{3} a^3 = \frac{250}{9}$$

$$\frac{1}{3} a^3 = \frac{250}{9}$$

$$a^3 = \frac{750}{9}$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{750}{9}} \approx 4,37$$



PARAGRAAF 11.2 : PRIMITIEVEN EN INTEGRALen

LES 1 PRIMITIVEREN EN KETTINGREGEL

VOORBEELD 1

Primitiveer

a. $f(x) = 14(4x - 2)^6$

b. $f(x) = 2 \cdot 4^{5x+1}$

OPLOSSING 1

- a. Neem $u = 4x - 2$ dan is $u' = 4$. Omdat integreren het tegenovergestelde van differentiëren is, moet je die 4 corrigeren.

Dus kettingregel bij primitiveren $\rightarrow \cdot \frac{1}{4}$. Dus

$$f(u) = 14(u)^6 \Rightarrow F(u) = 14 \cdot \frac{1}{7} u^7 = 2u^7$$

$$u = 4x - 2 \Rightarrow u' = 4 \Rightarrow \frac{1}{u'} = \frac{1}{4}$$

$$F(x) = F(u) \cdot \frac{1}{u'} = 2u^7 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} u^7 = \frac{1}{2} (4x - 2)^7$$

- b. Het stappenplan met $u = 5x + 1$.

$$f(u) = 2 \cdot 4^u \Rightarrow F(u) = 2 \cdot \ln(4) \cdot 4^u$$

$$u = 5x + 1 \Rightarrow u' = 5 \Rightarrow \frac{1}{u'} = \frac{1}{5}$$

$$F(x) = F(u) \cdot \frac{1}{u'} = 2 \cdot \ln(4) \cdot 4^u \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5} \cdot \ln(4) \cdot 4^u = \frac{2}{5} \cdot \ln(4) \cdot 4^{5x+1}$$

PARAGRAAF 11.3 INHOUDEN

LES 1 : WENTELLEN OM DE X-AS

STAPPENPLAN INHOUD VAN OMWENTELINGSLICHAAM L TUSSEN F(X) EN Y-AS

(1) Maak een schets

(2) Bereken de snijpunten van f en met de y-as (deze noemen we a en b)

(3) Inhoud L = som van de cirkeltjes $= \sum \pi \cdot r^2 = \int_a^b \pi \cdot (f(x))^2 dx$

STAPPENPLAN INHOUD VAN OMWENTELINGSLICHAAM L TUSSEN F(X) EN G(X)

(1) Maak een schets

(2) Bereken de snijpunten van f en g (deze noemen we a en b)

(3) Inhoud = som van de cirkeltjes grootste - som van de cirkeltjes kleinste

$$\text{Inhoud L} = \int_a^b \pi \cdot (f(x))^2 dx - \int_a^b \pi \cdot (g(x))^2 dx$$

VOORBEELD 1

Gegeven is de functie $f(x) = 4 - x^2$. V is het vlakdeel ingesloten door de grafiek van f en de x-as. V wordt gewenteld om de x-as. Zo ontstaat het omwentelingslichaam L.

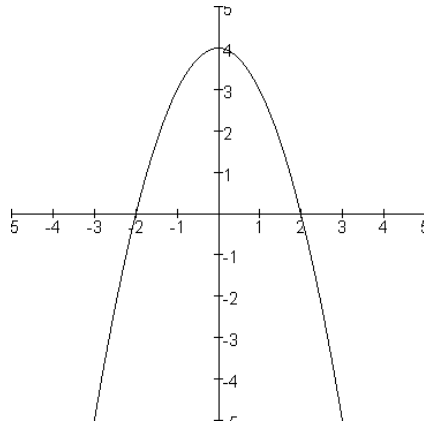
a. Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam L in 2 dec.

W is het vlakdeel ingesloten door de grafiek van f en de lijn $y = 3$. W wordt gewenteld om de x-as. Zo ontstaat het omwentelingslichaam M.

b. Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam M in 2 dec.

OPLOSSING 1

a.



$$\text{Inhoud} = \int_{-2}^2 \pi \cdot (4 - x^2)^2 dx = \int_{-2}^2 \pi \cdot (16 - 8x^2 + x^4) dx =$$

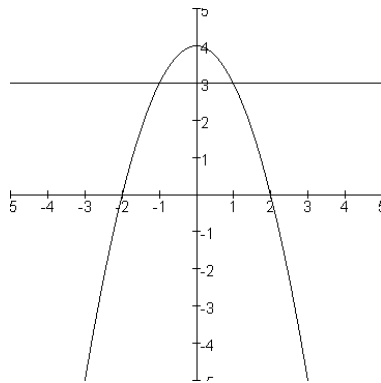
$$F(x) = 16x - \frac{8}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5$$

$$F(2) = 16 \cdot 2 - \frac{8}{3} \cdot 2^3 + \frac{1}{5} \cdot 2^5 = 17,07$$

$$F(-2) = 16 \cdot (-2) - \frac{8}{3} \cdot (-2)^3 + \frac{1}{5} \cdot (-2)^5 = -17,07$$

$$\text{Inhoud} = \pi \cdot (17,07 - (-17,07)) = 107,23$$

b.



$$\text{Inhoud} = \int_{-1}^1 \pi \cdot (4 - x^2)^2 dx - \int_{-1}^1 \pi \cdot (3)^2 dx = \int_{-1}^1 (\pi \cdot (16 - 8x^2 + x^4) - 9\pi) dx =$$

$$= \int_{-1}^1 \pi \cdot (7 - 8x^2 + x^4) dx =$$

$$V(x) = \pi \cdot (7x - \frac{8}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5)$$

$$V(1) = \pi \cdot (7 \cdot 1 - \frac{8}{3} \cdot 1^3 + \frac{1}{5} \cdot 1^5) = 14,24$$

$$V(-1) = \pi \cdot (7 \cdot (-1) - \frac{8}{3} \cdot (-1)^3 + \frac{1}{5} \cdot (-1)^5) = -14,24$$

$$\text{Inhoud} = (14,24 - (-14,24)) = 28,48$$

LES 2 : WENTELLEN OM DE Y-AS**VOORBEELD 1**

Gegeven is de functie $f(x) = x^2$.

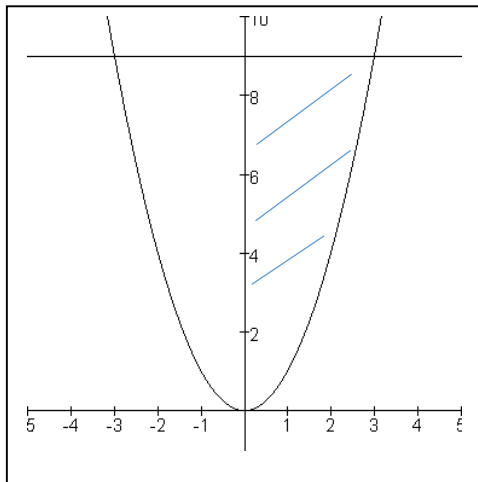
Vlak W is het vlakdeel ingesloten door de grafiek van f , de y-as en de lijn $y = 9$.

Vlak W wordt gewenteld om de y-as en zo ontstaat het lichaam L.

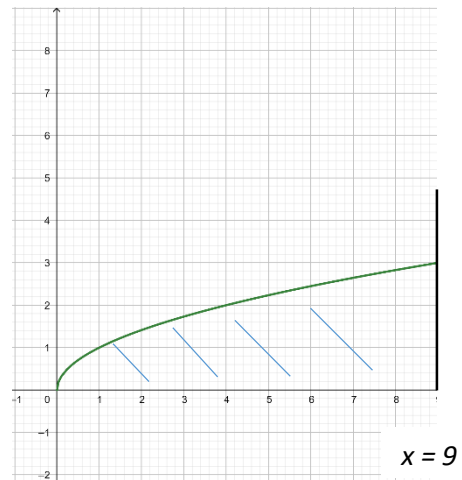
Bereken de inhoud van L.

OPLOSSING 1

$$y = x^2$$



$$y = \sqrt{x}$$



Als W wordt gewenteld rond de y-as, dan is dat gelijk aan de inverse wentelen om de x-as !!!!

(1) Inverse berekenen

(1.1) Wissel x en y

$$y = x^2 \rightarrow x = y^2$$

(1.2) Schrijf als $y = \dots$

$$y^2 = x$$

$$y = \sqrt{x}$$

(inverse)

(2) Grens bepalen

De lijn $y = 9$ in de 1^e figuur, wordt $x = 9$ in de 2^e figuur

(3) De wenteling om de x-as berekenen :

$$\text{Inhoud} = \int_0^9 \pi \cdot (\sqrt{x})^2 dx = \int_0^9 \pi x dx = \left[\pi \cdot \frac{1}{2} x^2 \right]_0^9 = 40\frac{1}{2} \pi$$

PARAGRAAF 11.4 TOEPASSINGEN VAN INTEGRALen

LES 1 : BOL / KEGEL EN DE GR GEBRUIKEN

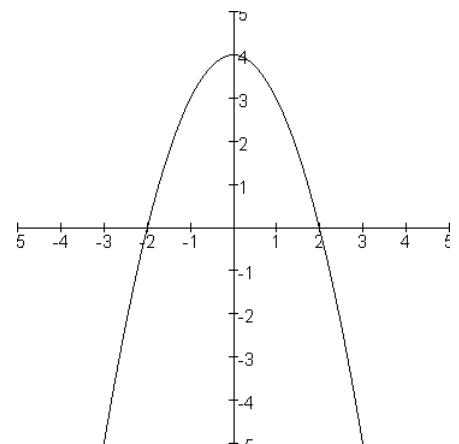
DEFINITIES BOL EN KEGEL

- $Inhoud\ bol = \frac{4}{3}\pi r^3$
- $Inhoud\ kegel = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
- De oppervlakte van een bol = Afgeleide van de Inhoud = $4\pi r^2$

VOORBEELD 1 : OPPERVLAKTE MET GR

Gegeven is de functie $f(x) = 4 - x^2$.

- Bereken de oppervlakte tussen $f(x)$ en de x-as.
- Bereken de oppervlakte tussen $f(x)$ en de lijn $y = 3$.



OPLOSSING 1

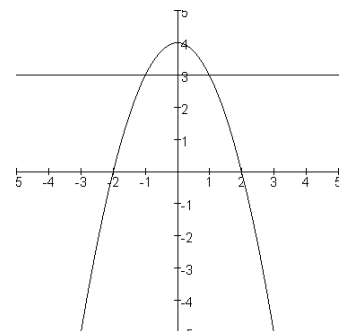
Omdat er GEEN exact of algebraïsch staat, mag je de GR gebruiken :

- Je doet dit met de knop fnInt (Math → 9 : fnInt)

$$\text{fnInt} \rightarrow \int_{-2}^2 f(x) dx = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = 10\frac{2}{3}$$

- $f(x) - g(x) = 4 - x^2 - 3 = 1 - x^2$

$$\text{fnInt} \rightarrow \int_{-1}^1 (f(x) - 3) dx = \int_{-1}^1 (4 - x^2 - 3) dx = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = 1\frac{1}{3}$$



LES 2 : BOOGLENGTE EN VERSNELLING / SNELHEID / AFSTAND (A / V / S)**DEFINITIE VERSNELLING / SNELHEID / AFSTAND (A / V / S)**

- $f(x) = \text{afstand (=s)} \Leftrightarrow f'(x) = \text{snelheid (=v)} \Leftrightarrow f''(x) = \text{versnelling (=a)}$
- $s' = v$ en $s'' = a$ en $v' = a$

VOORBEELD 1

Op $t = 0$ is de versnelling 20 m/s^2 en op $t = 10$ is de versnelling 0 .
Bereken de afgelegde afstand als gegeven is dat de versnelling lineair is t.o.v. de tijd.

OPLOSSING 1

(1) De versnelling is lineair en op $t = 0$ is $a = 20$

$$\text{Dus : } a = pt + 20$$

Vul $(10,0)$ in :

$$0 = p \cdot 10 + 20$$

$$p = -2.$$

(2) Dus $a = -2t + 20$. Integreren geeft

$$v = -t^2 + 20t$$

$$s = -\frac{1}{3}t^3 + 10t^2$$

(3) Na 10 seconden is de afgelegde afstand : $s = -\frac{1}{3} \cdot 10^3 + 10 \cdot 10^2 = 667 \text{ meter}$

VOORBEELD 2 : BOOGLENGTE

Gegeven is de functie $f(x) = x^2$. Punt A is een punt op f met $x_A = 3$.

Bereken de booglengte van OA in 2 decimalen nauwkeurig.

OPLOSSING 2

$$\text{Booglengte} = \int_0^3 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_0^3 \sqrt{1 + (2x)^2} dx = \int_0^3 \sqrt{1 + 4x^2} dx$$

$$\text{fnInt} \rightarrow \int_0^3 \sqrt{1 + 4x^2} dx = 9,75$$